UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
MATEMÁTICAS IV (MA-2115)

Elaborado por
Samuel Alonso
14-10028
Ing. Telecom

10 de marzo de 2017

Criterios de Convergencia, Conjunto y Radio de Convergencia, Serie de Maclaurin, EDO de Bernoulli

Resolución Segundo Parcial 2015 Abril-Julio Tipo C

1. Decidir si las siguientes series numéricas convergen o divergen

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n-2^n}{4^{n+1}} \qquad b)\ \sum_{2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)^p} \qquad c)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\sqrt{3n^2-1}}$$

a) Puesto que $7^n - 2^n$ es siempre positivo, y parece crecer mucho más rápido que 4^{n+1}, un buen punto de partida es verificar que el término n-ésimo tiende a cero a medida que n tiende al infinito. Recordemos que ésta es una condición *necesaria* para la convergencia de una serie. Tomando

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^n-2^n}{4^{n+1}}$$

vemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^n-2^n}{4^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{7^n-2^n}{2^{2n+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{7}{2}\right)^n-1}{4} = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{7}{2}\right)^n-1\right] = \infty.$$

Puesto que el límite no es cero, entonces la serie diverge.

b) Para analizar la serie planteemos tres casos distintos sobre p. Consideremos de ahora en adelante la cola de la serie, comenzando a partir de $n = 3$.

1) $\underline{p > 1}$

Si $p > 1$, entonces

$$\frac{1}{n\ln(n)^p}$$

es positiva y monótonamente decreciente para $n \geq 3 > e$. A partir de esto, podemos aplicar el criterio integral para decidir la convergencia de la serie. Veáse que

$$\int_3^{\infty}\frac{1}{z\ln(z)^p}dz = \int_C^{\infty}\frac{1}{u^p}du, \quad u = \ln(z), \quad C = \ln(3).$$

pero ésta última integral es una integral-p convergente, puesto que $p > 1$. Por ende, y según el criterio integral, la serie converge para $p > 1$.

2) $\underline{0 < p \leq 1}$

Para el caso $0 \leq p \leq 1$ el argumento utilizado anteriormente sigue siendo válido, puesto que el sumando sigue siendo positivo y monótonamente decreciente, sólo que ahora, dado que $0 \leq p \leq 1$, la integral-p no converge, y por ende la serie tampoco.

3) $\underline{p < 0}$

Para considerar $p < 0$ es más sencillo tomar $q = -p$, con $q > 0$. Entonces,

$$\frac{1}{n \ln(n)^p} = \frac{\ln(n)^q}{n}.$$

Pero ahora sucede que

$$\frac{1}{n} < \frac{\ln(n)^q}{n}$$

para todo $n \geq 3$. Entonces, por el criterio de comparación, la divergencia de la serie armónica implica la divergencia de la serie para $p < 0$.

Estos tres casos cubren todos los valores posibles de p, y por ende, se concluye que la serie converge únicamente para $p > 1$. Para todo otro valor de p, la serie diverge.

c) Dado que la expresión es una fracción que tiene un término n^2 dentro de una raíz en su denominador, ésta debería comportarse de la forma $1/n$ a medida que $n \to \infty$. Considerando entones

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{\sqrt{3n^2-1}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt{3-n^{-2}}} = \frac{4}{\sqrt{3}},$$

vemos que ambas expresiones son asintóticamente similares. Por ende, y según el criterio de comparación por paso al límite, la divergencia de la serie armónica implica la divergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{3n^2-1}}.$$

2. Hallar el conjunto de convergencia y el radio de convergencia para la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2n}{4n^2-3} (x+1)^n.$$

Utilicemos el criterio del cociente para determinar el radio de convergencia de la serie.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+2} 2(n+1)(x+1)^{n+1}}{4(n+1)^2-3} \cdot \frac{4n^2-3}{(-1)^{n+2} 2n(x+1)^n} \right|.$$

La expresión puede reescribirse juntando los términos n y de n^2 apropiadamente, y tomando factor común n y n^2, para luego ser evaluada directamente.

$$|x+1| \lim_{n\to\infty} \left| 1 + \frac{1}{n} \right| \left| \frac{4-3n^{-2}}{4(1+n^{-1})^2 - 3n^{-2}} \right| = |x+1|.$$

Entonces, según el criterio del cociente, para asegurar que la serie converga absolutamente basta con tomar

$$|x+1| < 1.$$

Esto indica que el radio de convergencia de la serie es $R = 1$. Para hallar el resto del conjunto de convergencia, sólo queda por analizar la convergencia de la serie sobre el radio de convergencia. Para $(x+1) = 1$, se obtiene la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2n}{4n^2 - 3}.$$

Puesto que la serie es alternada, basta con mostrar que

$$\frac{2n}{4n^2 - 3} > 0, \quad n \geq 1$$

es monótonamente decreciente y tiende a cero a medida que $n \to \infty$ para decidir su convergencia mediante el criterio de Leibniz. Veamos que

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{2z}{4z^2 - 3}\right) = -\frac{8z^2 + 6}{(4z^2 - 3)^2},$$

que es negativa para todo z, y en particular para $z \geq 1$. Esto muestra que la expresión es monótonamente decreciente. Fácilmente puede verificarse también que ésta tiende a cero cuando $z \to \infty$. Entonces, de acuerdo al criterio de Leibniz, la serie de potencias converge en $(x+1) = 1$. Para $(x+1) = -1$, se obtiene la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1} 2n}{4n^2 - 3} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{4n^2 - 3}.$$

Se puede intuír que la expresión, dado que tiene un término n en el numerador y un término n^2 en el denominador, debería comportarse de la forma $1/n$ a medida que n tiende al infinito. En efecto, no es difícil comprobar que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2n}{4n^2 - 3}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{4 - 3n^{-2}} = \frac{1}{2},$$

lo cual muestra que las expresiones son asintóticamente similares. En vista de esto, la divergencia de la serie armónica implica entonces la divergencia de la serie de potencias en $(x+1) = -1$, según el criterio de comparación por paso al límite. Finalmente, el conjunto de convergencia para la serie resulta $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x + 1 \leq 1\}$, y su radio de convergencia es $R = 1$.

3. Hallar el desarrollo en serie de Maclaurin de la función

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Si se recuerda la expansión de Maclaurin de la función $\ln(1+x)$, hallar la serie correspondiente para $f(x)$ se vuelve casi trivial. Sin embargo, también puede hallarse expandiendo el logaritmo y siendo creativos con la serie geométrica. Veamos que

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x).$$

La estrategia será derivar a f y expresar su derivada en términos de la suma de una serie geométrica, para luego integrar la serie término a término y así obtener de vuelta a f. Derivando,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-(-x)} + \frac{1}{1-x}.$$

Esta última expresión puede expresarse en términos de una serie geométrica como

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x)} + \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n)x^n,\ |x|<1.$$

Integrando término a término obtenemos de vuelta a f, pero ahora como una serie de Maclaurin.

$$f(x) = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n)x^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n)\int x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+(-1)^n)}{n+1}x^{n+1}.$$

Es importante destacar que se ha intercambiado el orden entre suma e integración debido a que la serie de potencias es uniformemente convergente (en $|x|<1$), por ser una serie de potencias. Ahora, como $(1+(-1)^n)=0$ para n impar, y $(1+(-1)^n)=2$ para n par, podemos reescribir la serie de una forma más bonita.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+(-1)^n)}{n+1}x^{n+1} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Por ser la integral de una serie de potencias, su radio de convergencia es, al menos, el de la serie original ($R=1$). Evaluando en $x=\pm 1$ vemos que, por comparación con la serie armónica, la serie diverge, y por tanto su radio de convergencia es exactamente 1. Finalmente, la serie de Maclaurin de $f(x)$ es

$$f(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x|<1.$$

4. Resolver el problema a valores iniciales $xy' + y = xy^2$, $y(1)=2$.

De inmediato podemos reconocer la expresión como una ecuación de Bernoulli. Para evitar errores al cambiar de variable, reescribamos la expresión como

$$-xy'y^{-2} - y^{-1} = -x.$$

Tomando ahora el cambio de variable $u = y^{-1}$, $u' = -y^{-2}y'$, obtenemos

$$xu' - u = -x.$$

Esta ecuación no es separable. Sin embargo, sí es homogénea. En efecto,

$$u' = -1 + \frac{u}{x}.$$

Por ende, tomando el cambio de variable $v = u/x$,

$$v + xv' = -1 + v, \qquad v' = -\frac{1}{x}.$$

Para hallar v basta con integrar directamente. Luego, para hallar la solución, solo hace falta devolver los cambios de variable.

$$v = -\ln(x) + C, \qquad \frac{y^{-1}}{x} = -\ln(x) + C.$$

Y entonces la solución general de la ecuación diferencial en forma implícita resulta

$$\frac{1}{xy} + \ln(x) = C.$$

Donde C es una constante arbitraria. Para hallar el valor de C que se ajusta al problema de valor inicial, consideramos $y(1)=2$.

$$\frac{1}{1\cdot 2} + 0 = C \implies C = \frac{1}{2}.$$

Finalmente, la solución al problema a valores iniciales en forma implícita es

$$\frac{1}{xy} + \ln(x) = \frac{1}{2}.$$

Nota: Este material fue elaborado por Samuel Alonso con ejercicios obtenidos del segundo parcial de Abril-Julio del 2015 (tipo C), y fue realizado para el uso de toda la comunidad académica.

Samuel Alonso
Carnet: 14-10028
Ingeniería en Telecomunicaciones
Twitter: @zickpic

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección gecousb@gmail.com